Impact Factor: 9.9
ISSN-L: 2544-980X

Ikkinchi Tartibli Parabolo-Giperbolik Tipdagi Tenglama Uchun Nolokal Shartli Masalalar

Khalilov Kobiljon Solijonovich [1], Ne'matjonova Muattarkhon Rustamjon kizi [2]

Annotatsiya: Ushbu maqolada ikkinchi tartibli model parabolo-giperbolik va parabolik qismida spektral parametr qatnashgan aralash tipdagi tenglamalar uchun integral shartli masalalarning bir qiymatli yechilishi tadqiq qilingan. Masalalar yechimining mavjudligi va yagonaligi integral tenglamalar nazariyasi yordamida isbotlangan.

Kalit so'zlar: Parabolo-giperbolik tipdagi tenglama, integral shartli masala, Koshi masalasi, Volterra integral tenglamasi, integral tenglamalar nazariyasi.

Kirish: Parabolo-giperbolik tenglamalar uchun chegaraviy va boshlang'ich chegaraviy masalalar o'rganish bo'yicha tizimli tadqiqotlar o'tgan asrning 60-yillaridan boshlandi. Bunday tenglamalar uchun masalalar o'rganishga bag'ishlangan dastlabki ishlar qatoriga G.M.Struchina, S.I.Gayduk va A.Ivanov, O.A.Ladijenskaya va L.Stuplyalis, L.A.Zolinalarning ishlarini keltirish mumkin. Keyinchalik, parabolo-giperbolik tenglamalar uchun fundamental natijalar uchinchi tartibli tenglamalar uchun M.S.Salahitdinov, T.D.Djurayevlar tomonidan olingan bo'lsa, ikkinchi tartibli tenglamalar uchun esa A.M.Naxushev, V.A.Vragov, N.Y.Kapustinlar tomonidan olindi. Nolokal shartli masalalarning eng muhim turlaridan biri integral shartli masalalardir. Bunday shartli masala tadqiqotini dastlab Dj.R.Cannon tomonidan amalga oshirilgan bo'lib, N.Ionkin, A.M.Naxushev, L.A.Muravey, A.V.Filinovskiy, L.S.Pulkina, A.I.Kojanov, O.S.Zikirov, A.T.Asanova, K.B.Sabitov, A.Q.O'rinov va boshqalar tomonidan rivojlantirilgan.

xOy tekislikning $x=0,\ \ y=1,\ \ x=1$ to'g'ri chiziqlar hamda giperbolik tipdagi tenglamaning $x+y=0,\ \ x-y=1$ xarakteristikalari bilan chegaralangan chekli sohani D bilan belgilaylik hamda ushbu $D_1=\left[D\cap(y>0)\right]\cup AE,\quad D_2=D\cap(y<0),\quad AE=\left\{(x,0):\quad 0<x<1\right\},$ $OM=\left\{\left(x,y\right):y=-x,\quad 0<x<1/2\right\},\quad BM=\left\{(x,y):y=x-1,\quad 1/2<x<1\right\}$ belgilashlarni kiritaylik.

Ushbu

$$\begin{cases} u_{xx}-u_y=0,\ (x,y)\in D_1, \\ u_{xx}-u_{yy}=0,\ (x,y)\in D_2 \end{cases} \qquad (1)$$

tenglama uchun D sohada quyidagi masalani qaraylik.

1- masala. Shunday $u(x,y)\in C(\bar{D})\cap C^{2,1}_{x,y}(D_1)\cap C^{2}_{x,y}(D_2)$ funksiya topilsinki, u D_1 va D_2 sohada (1) tenglamaning regulyar yechimi hamda ushbu

$$\int_0^1 u(x,y)dx=\int_0^y u(0,t)dt+\mu_1(y),\ \ 0\le y\le 1; \qquad (2)$$

[1] Associate Professor of Fergana State University, qsxalilov@gmail.com
[2] Master student of Fergana State University, muattarxonnematjonova1210@gmail.com

$$u(1,y)=\mu_2(y),\ 0\le y\le 1; \tag{3}$$

$$u(x,x-1)=\psi(x),\ \ 0\le x\le (1/2); \tag{4}$$

$$\lim_{y\to+0} u_y(x,y)=\lim_{y\to-0} u_y(x,y),\ \ 0<x<1 \tag{5}$$

shartlarni qanoatlantirsin, bu yerda $\mu_1(y)$, $\mu_2(y)\in C[0,1]$, $\psi(x)\in C[1/2,1]\cap C^2[1/2,1]$, $\psi'(x)\in L[1/2,1]$ va $\psi(1)=\tau(1)=\mu_2(0)$ kelishuv sharti bajarilsin.

D sohada ushbu

$$0=\begin{cases} u_{xx}-u_y-\lambda^2 u, & (x,y)\in D_1, \\ u_{xx}-u_{yy}, & (x,y)\in D_2, \end{cases} \tag{6}$$

aralash tipdagi tenglamani qaraylik, bu yerda λ - berilgan haqiqiy son.

2-masala: Quyidagi xossalarga ega bo‘lgan $u(x,y)$ funksiya topilsin:

1) $u(x,y)\in C(\bar{D})\cap C^{2,1}_{x,y}(D_1)\cap C^{2,2}_{x,y}(D_2)$;

2) $u(x,y)$ funksiya $D_1\cup D_2$ sohada (6) tenglamaning regulyar yechimi;

3) (2), (3), (5) va

$$u(x,-x)=\psi(x),\ \ 0\le x\le (1/2); \tag{7}$$

shartlarni qanoatlantirsin, bu yerda $\mu_1(x)$, $\mu_2(x)$ - berilgan silliq funksiyalar.

Endi 1-masalaning bir qiymatli yechilishini tadqiq qilish bilan shug‘ullanamiz. Faraz qilaylik, $u(x,y)$ funksiya qo‘yilgan masalaning yechimi bo‘lsin. Masala shartlariga asoslanib, quyidagi belgilash va farazlarni kiritaylik:

$$\begin{gathered} u(x,+0)=u(x,+0)=\tau(x),\ \ 0\le x\le 1,\quad \tau(x)\in C[0,1]\cap C^2(0,1); \\ \lim_{y\to+0} u_y(x,y)=\lim_{y\to-0} u_y(x,y)=\nu(x),\ \ 0<x<1,\quad \nu(x)\in C^1(0,1)\cap L[0,1]. \end{gathered} \tag{8}$$

Yuqoridagi belgilashlarga asosan D_2 sohada tor tebranish tenglamasi uchun qo‘yilgan Koshi masalasining yechimi [15]

$$u(x,y)=\frac{\tau(x+y)+\tau(x-y)}{2}+\frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y}\nu(\xi)d\xi \tag{9}$$

ko‘rinishda yoziladi. (9) formulani (4) shartga bo‘ysundirsak, Koshi masalasi yechimi ko‘rinishi

$$u(x,x-1)=\frac{1}{2}\left[\tau(2x-1)+\tau(1)\right]+\frac{1}{2}\int_{1}^{2x-1}\nu(\xi)d\xi=\psi(x),\ \ 0\le x\le (1/2),$$

ya’ni

$$\tau(2x-1)+\tau(1)+\int_{1}^{2x-1}\nu(\xi)d\xi=2\psi(x),\ \ 0\le x\le (1/2)$$

kelib chiqadi. Oxirgi tenglikda $2x-1=z\in[0,1]$ belgilash kiritib va z o‘zgaruvchi bo‘yicha differensiallab, so‘ngra z ni x ga ekvivalent almashtirib, D_2 sohada $\tau(x)$ va $\nu(x)$ noma’lum funksiyalar o‘rtasidagi

$$\nu(x)=\psi'((x+1)/2)-\tau'(x),\ 0<x<1 \qquad (10)$$

asosiy funksional munosabatga ega bo‘lamiz.

D_1 sohada $u(x,y)\in C(\overline{D})$ va $u_y(x,y)\in C(D)$ ekanligini e’tiborga olib, (1) tenglama va (2), (3) chegaraviy shartlardan $y\to+0$ da limitga o‘tsak,

$$\tau''(x)-\nu(x)=0,\ \ 0<x<1; \qquad (11)$$

$$\int_0^1\tau(x)dx=\mu_1(0),\ \ \tau(1)=\mu_2(0) \qquad (12)$$

hosil bo‘ladi.

Agar (10), (11) va (12) munosabatlardan foydalanib, $\tau(x)\in C[0,1]\cap C^2(0,1)$ va $\nu(x)\in C^1(0,1)\cap L[0,1]$ noma’lum funksiyalar bir qiymatli topilsa, u holda qo‘yilgan masalaning yechimi D_2 sohada (9) formula bilan topiladi. Shu maqsadda, (8) belgilashlarni e’tiborga olgan holda $\nu(x)$ funksiyaning (10) ifodasini (11) tenglamaga qo‘yib,

$$\tau''(x)+\tau'(x)=-\psi'((x+1)/2),\ \ 0<x<1 \qquad (13)$$

oddiy differensial tenglamaga ega bo‘lamiz. Natijada oddiy differensial tenglama uchun {(12),(13)} masala hosil bo‘ladi. Oddiy differensial tenglamalar nazariyasidan ma’lum usullardan foydalanib, {(12), (13)} masalaning yechimi $\tau(x)$ funksiyani

$$\tau(x)=4\psi\left[\frac{x+1}{2}\right]-3\mu_2(0)+\left[\mu_1(0)+3\mu_2(0)\right]\left[\frac{e^{1-x}-1}{e-2}\right]+$$
$$+\frac{4}{e-2}\left[1-e^{1-x}\right]\int_0^1\psi\left(\frac{x+1}{2}\right)dx-2e^{-x}\int_0^x e^z\psi\left(\frac{z+1}{2}\right)dz+\frac{2}{e}\int_0^1 e^z\psi\left(\frac{z+1}{2}\right)dz+$$
$$+\frac{2}{e-2}\left[1-e^{1-x}\right]\int_0^1\left(e^{z-1}-1\right)\psi\left(\frac{z+1}{2}\right)dz+\frac{2}{e-2}\left[\frac{1-e^{1-x}}{e}\right]\int_0^1 e^z\psi\left(\frac{z+1}{2}\right)dz \qquad (14)$$

ko‘rinishda topamiz. Buning natijasida qo‘yilgan 1-masala D_1 sohada quyidagi masalaga keladi.

1'-masala. D_1 sohada $u_{xx}-u_y=0$ tenglamaning (2), (3) va $u(x,0)=\tau(x)$, $0\le x\le 1$ shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi topilsin, bu yerda $\tau(x)$ funksiya (14) tenglik orqali aniqlanadi.

Hosil bo‘lgan 1'-masala avvalgi [26] ishda o‘rganilgan masalaga o‘xshash bir qiymatli yechilishi tadqiq qilinadi.

Endi 2-masalaning bir qiymatli yechilishi tadqiqi bilan shug‘ullanamiz. Faraz qilaylik, $u(x,y)$ funksiya qaralayotgan masalaning yechimi bo‘lsin. (8) belgilashlarga asosan D_2 sohada tenglama uchun qo‘yilgan Koshi masalasining yechimi (9) ko‘rinishida yoziladi.

(9) formulani (7) shartga bo'ysundirsak,

$$u(x,-x)=\frac{1}{2}\left[\tau(0)+\tau(2x)\right]+\frac{1}{2}\int_{2x}^{0}\nu(\xi)d\xi=\psi(x),\ \ 0\le x\le(1/2),$$

ya'ni

$$\tau(0)+\tau(2x)-\int_{0}^{2x}\nu(\xi)d\xi=2\psi(x),\ \ 0\le x\le(1/2)$$

hosil bo'ladi. Oxirgi tenglikda $2x=z\in[0,1]$ belgilash kiritib va z o'zgaruvchi bo'yicha differensiallaymiz, so'ngra z ni x ga ekvivalent almashtirib D_2 sohada $\tau(x)$ va $\nu(x)$ noma'lum funksiyalar o'rtasidagi

$$\nu(x)=\tau'(x)-\psi'(x/2),\ \ 0<x<1 \qquad (15)$$

asosiy funksional munosabatga ega bo'lamiz.

D_1 sohada $u(x,y)\in C(\overline{D})$ va $u_y(x,y)\in C(D)$ ekanligini e'tiborga olib, (6) tenglama va (2), (3) chegaraviy shartlardan $y\to+0$ da limitga o'tsak,

$$\tau''(x)-\lambda^2\tau(x)=\nu(x),\ \ 0<x<1; \qquad (16)$$

$$\int_0^1\tau(x)dx=\mu_1(0),\ \ \tau(1)=\mu_2(0) \qquad (17)$$

hosil bo'ladi.

Agar (15), (16) va (17) munosabatlardan foydalanib, $\tau(x)\in C[0,1]\cap C^2(0,1)$ va $\nu(x)\in C^1(0,1)\cap L[0,1]$ noma'lum funksiyalar bir qiymatli aniqlansa, u holda qo'yilgan masalaning yechimi D_2 sohada (9) formula bilan topiladi. Shu maqsadda $\nu(x)$ funksiyaning (15) ifodasini (16) tenglamaga qo'yib,

$$\tau''(x)-\tau'(x)-\lambda^2\tau(x)=-\psi'(x/2),\ 0<x<1 \qquad (19)$$

oddiy differensial tenglamaga ega bo'lamiz. Natijada oddiy differensial tenglama uchun {(16),(17)} masala hosil bo'ladi. Oddiy differensial tenglamalar nazariyasidan ma'lum usullardan foydalanib, noma'lum $\tau(x)$ funksiyani

$$\tau(x)=\frac{2}{a-b}\psi(0)\left[e^{ax}-e^{bx}\right]-\frac{2ae^{ax}}{a-b}\int_0^x e^{-az}\psi\left(\frac{z}{2}\right)dz+\frac{2be^{bx}}{a-b}\int_0^x e^{-bz}\psi\left(\frac{z}{2}\right)dz+$$

$$+\mu_2(0)e^{bx-b}-Ae^{bx-b+a}\left[\mu_1(0)+\frac{2}{b(a-b)}\psi(0)(e^{a-b}-1)(e^b-1)+\frac{2}{(a-b)}\psi(0)\right]+$$

$$+\frac{2}{a-b}A\left(\frac{1}{a}e^a-\frac{1}{b}e^b-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\psi(0)\left(e^{bx-b+a}-e^{ax}\right)+\mu_2(0)A\left(\frac{e^b-1}{b}\right)\left(e^{bx-2b+a}-e^{ax-b}\right)+$$

$$+\frac{2}{a-b}\left(\frac{e^b-1}{b}\right)\psi(0)\left(e^{ax+a-b}-e^{ax}\right)+\frac{2a}{a-b}\left(e^{bx-2b+a}+e^{bx-b+a}+e^{a-b}\right)\int_0^1 e^{-az}\psi\left(\frac{z}{2}\right)dz-$$

$$-\frac{2}{a-b}\left(A\left(e^{b}-1\right)e^{bx-b+a}+be^{bx}+b\right)\int_{0}^{1}e^{-bz}\psi\left(\frac{z}{2}\right)dz-\frac{2}{a-b}A\left(e^{bx-b+a}+e^{ax}\right)\int_{0}^{1}\left(e^{a(1-z)}-1\right)\psi\left(\frac{z}{2}\right)dz+$$
$$+\frac{2}{a-b}\left(e^{bx-b+a}-e^{ax}\right)\int_{0}^{1}\left(e^{b(1-z)}-1\right)\psi\left(\frac{z}{2}\right)dz \qquad (19)$$

ko‘rinishda topamiz, bu yerda $a=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1+4\lambda^{2}}\right)$, $b=\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1+4\lambda^{2}}\right)$,
$A=\left[\frac{e^{a}-1}{a}+\frac{e^{a-b}-e^{a}}{b}\right]^{-1}$.

Bundan 2-masala D_1 sohada quyidagi masalaga ekvivalent keltiriladi.

2'-masala. D_1 sohada $u_{xx}-u_{y}-\lambda^{2}u=0$ tenglamaning (2), (3) va $u\left(x,0\right)=\tau\left(x\right)$, $0\le x\le 1$ shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi topilsin, bu yerda $\tau\left(x\right)$ funksiya (19) tenglik orqali aniqlanadi.

Endi $2'$-masalaning bir qiymatli yechilishini tadqiq qilamiz. Faraz qilaylik, $u\left(x,y\right)$ funksiya $2'$-masalaning yechimi hamda $u\left(0,y\right)=\mu\left(y\right)$, $0\le y\le 1$, $\mu\left(y\right)\in C\left[0,1\right]$ bo‘lsin. U holda D_1 sohada birinchi chegaraviy masalaning yechimi $u\left(x,y\right)$ funksiya [3]

$$u(x,y)=\int_{0}^{1}\tau(\xi)e^{-\lambda^{2}y}G(x,y;\xi,0)d\xi+\int_{0}^{y}\mu(\eta)e^{\lambda^{2}(\eta-y)}G_{\xi}(x,y;0,\eta)d\eta-$$
$$-\int_{0}^{y}\mu_{2}(\eta)e^{\lambda^{2}(\eta-y)}G_{\xi}(x,y;1,\eta)d\eta \qquad (20)$$

ko‘rinishda yoziladi, bu yerda $G(x,y;\xi,\eta)$ - Grin funksiyasi,

$$G(x,y;\xi,\eta)=\frac{1}{2\sqrt{\pi(y-\eta)}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left\{exp\left[-\frac{(x-\xi+2n)^{2}}{4(y-\eta)}\right]-exp\left[-\frac{(x+\xi+2n)^{2}}{4(y-\eta)}\right]\right\}.$$

(20) tenglikni (2) shartga bo‘ysundirib, x bo‘yicha $\left[0,1\right]$ kesmada integrallaymiz:

$$\int_{0}^{1}u\left(x,y\right)dx=\int_{0}^{1}\left[\int_{0}^{1}\tau(\xi)e^{-\lambda^{2}y}G(x,y;\xi,0)d\xi+\int_{0}^{y}\mu(\eta)e^{\lambda^{2}(\eta-y)}G_{\xi}(x,y;0,\eta)d\eta-\right.$$
$$\left.-\int_{0}^{y}\mu_{2}(\eta)e^{\lambda^{2}(\eta-y)}G_{\xi}(x,y;1,\eta)d\eta\right]dx.$$

Oxirgi ifodaning o‘ng tomonidagi ikkinchi integralda integrallash tartibini o‘zgartirib, so‘ngra $\left(\partial/\partial\xi\right)G=-\left(\partial/\partial x\right)G_{1}$ ekanligini e’tiborga olsak, bunda

$$G_{1}(x,y;\xi,\eta)=\frac{1}{2\sqrt{\pi(y-\eta)}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left\{\exp\left[-\frac{(x-\xi-2n)^{2}}{4(y-\eta)}\right]+\exp\left[-\frac{(x+\xi-2n)^{2}}{4(y-\eta)}\right]\right\}$$

bo‘lib,

$$\int_0^1 G_\xi(x,y;0,\eta)dx = -\frac{1}{\sqrt{\pi(y-\eta)}} + K_0(y,\eta) \qquad (21)$$

kelib chiqadi, bu yerda

$$K_0(y,\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi(y-\eta)}} \sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ \exp\left[-\frac{(2n-1)^2}{4(y-\eta)} \right] - \exp\left[-\frac{n^2}{y-\eta} \right] \right\}.$$

Yuqoridagi (21) tenglikni, shuningdek, $K_0(y,\eta)$ funksiya $\{(y,\eta): 0 \le \eta < y \le 1\}$ da uzluksiz differensiallanuvchiligi hamda $\lim\limits_{\eta\to y} K_0(y,\eta) = \lim\limits_{\eta\to y} K_{0y}(y,\eta) = 0$ ekanligini inobatga olsak,

$$\int_0^1 u(x,y)dx = \int_0^y \left[-\frac{1}{\sqrt{\pi(y-\eta)}} + K_0(y,\eta) \right] e^{\lambda^2(\eta-y)} \mu(\eta)d\eta + g_2(y), \qquad (22)$$

hosil bo‘ladi, bu yerda

$$g_2(y) = \int_0^1 \left\{ \int_0^1 \tau(\xi)e^{-\lambda^2 y} G(x,y;\xi,0)d\xi + \int_0^y \mu_2(\eta)G_\xi(x,y;1,\eta)e^{\lambda^2(\eta-y)}d\eta \right\} dx.$$

(22) ni (2) shartga qo‘yib va $u(0,y) = \mu(y)$ belgilashga ko‘ra, $\mu(y)$ funksiyaga nisbatan quyidagi integral tenglamaga ega bo‘lamiz [9]:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^y (y-\eta)^{-1/2} \mu(\eta)d\eta + \int_0^y K_1(y,\eta)\mu(\eta)d\eta = \mu_1(y) - g_2(y), \qquad (23)$$

bu yerda

$$K_1(y,\eta) = \left[K_0(y,\eta)e^{\lambda^2(\eta-y)} - 1 \right] + [\pi(y-\eta)]^{-1/2} \left[1 + e^{\lambda^2(\eta-y)} \right]. \qquad (24)$$

Ushbu

$$g_3(y) = \mu_1(y) - g_2(y) - \int_0^y K_1(y,\eta)\mu(\eta)d\eta \qquad (25)$$

belgilashni kiritaylik va $g_3(y)$ funksiyani vaqtincha ma’lum deb qarab, (23) tenglamadan $\mu(y)$ funksiyaga nisbatan Abel integral tenglamasiga ega bo‘lamiz [9]:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^y (y-\eta)^{-1/2} \mu(\eta)d\eta = g_3(y), \quad 0 \le y \le 1. \qquad (26)$$

(24) tenglik va (17) shartning birinchisidan foydalanib, $g_3(0) = 0$ ekanligini ko‘rsatish qiyin emas. Abel integral tenglamalar nazariyasiga asosan [9], $g_3(0) = 0$ ekanligidan (26) tenglamani

$$\mu(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^y (y-z)^{-1/2} g_3'(z)dz, \quad 0 \le y \le 1$$

ko‘rinishda yozish mumkin. Bundan, (25) belgilashni e’tiborga olib ba’zi almashtirishlarni bajarib, quyidagi

$$\mu(y)-\int_0^y K_2(y,\eta)\mu(\eta)d\eta = g_4(y), \quad 0\le y\le 1 \tag{27}$$

ikkinchi tur Volterra integral tenglamasiga ega bo‘lamiz [9], bu yerda

$$g_4(y)=\int_0^y (y-\eta)^{-1/2}[\mu_1'(\eta)-g_2'(\eta)]d\eta,$$

$$K_2(y,\eta)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}(y-\eta)^{-1/2}\left\{K_1(\eta,\eta)+\int_\eta^y (y-z)^{-1/2}\frac{\partial}{\partial z}K_1(z,\eta)dz\right\}.$$

Agar $\tau(x)\in C^1[0,1]$, $\mu_1(y),\mu_2(y)\in C^1[0,1]$, $\tau(0)=\mu_2(0)=0$ bo‘lsa, u holda $K_2(y,\eta)$ funksiya kuchsiz maxsuslikka ega va $g_4(y)$ funksiya $[0,1]$ kesmada uzluksiz bo‘ladi.

Yuqoridagi shartlar bajarilganda (27) tenglama yagona $\mu(y)\in C[0,1]$ yechimga ega bo‘ladi.

$\mu(y)$ funksiyani topish orqali $u(x,y)$ funksiyani D_1 sohada bir qiymatli aniqlanadi. D_2 sohada masalaning yechimi $u(x,y)$ funksiya (15) formulaga asosan topiladi. $\tau(x)$ funksiya esa mos holda (19) formulaga ko‘ra aniqlanadi. Demak, quyidagi teorema o‘rinli.

Teorema. Agar $\psi(x)\in C^1[0,1/2]\cap C^2(0,1/2)$, $\mu_1(y)$, $\mu_2(y)\in C[0,1]$, $\psi(0)=\mu_2(0)=0$ bo‘lsa, u holda 2-masala yechimi yagona bo‘ladi.

Xulosa

Ushbu maqolada ikkinchi tartibli model parabolo-giperbolik va parabolik qismida spektral parametr qatnashgan aralash tipdagi tenglamalar uchun to‘g‘ri to‘rtburchak va xarakteristik uchburchakdan iborat sohada integral shartli masalalarning bir qiymatli yechilishi tadqiq qilingan. Ba’zi yetarli shartlarda qo‘yilgan masalalar yechimining mavjudligi va yagonaligi isbotlangan. Masala yechimining mavjudligi va yagonaligini isbotlashda integral tenglamalar nazariyasi usullaridan foydalanilgan. Maqolada o‘rganilgan masalalar yangi va undan xususiy hosilali differensial tenglamalar nazariyasini yanada rivojlantirish uchun foydalanish mumkin.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Бицадзе А.В., Самарский А.А. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач // Доклады АН СССР. 1969. Т.185. №4. – С. 739-740.
2. Врагов В.Н. Смешанная задача для одного класса параболо-гиперболических уравнений второго порядка // Дифференциальные уравнения. 1976. Т.12. № 1. – С. 24-31.
3. Джураев Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типа. – Ташкент: Фан, 1979. – 120 с.
4. Зикиров О.С. Об одной задаче с интегральными условиями для уравнения третьего порядка // Узбекский математ. журнал. 2006. №4. – С. 26-31.
5. Золина Л.А. О краевой задаче для модельного уравнения гиперболо-параболического типа // ЖВМ и МФ. 1966. Т.6. № 6. – С. 991-1001.
6. Ионкин Н.И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференциальные уравнения. 1977. Т.13. №2. – С. 294-304.
7. Капустин Н.Ю. О существовании и единственности L_2 -решения задачи Трикоми для одного параболо-гиперболического уравнения // Доклады АН СССР. 1986. Т.291. №2. – С. 288-292.

8. Ладыженская О.А., Ступлялис Л. Об уравнениях смешанного типа // Вестник ЛГУ. Серия мат., мех. и астр. 1965. Т.19. № 4. – С. 38-46.
9. Михлин С.Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. – Москва: Физико-математическая литература, 1959. – 232 с.
10. Муравей Л.А., Филиновский А.В. Об одной нелокальной краевой задаче для параболического уравнения // Матем. заметки. 1993. Т.54. вып.4.– С. 98-116.
11. Нахушев А.М. К теории краевых задач для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа // Доклады АН СССР. 1977. Т.235. №2. – С. 273-276.
12. Пулькина Л.С. Нелокальные задачи для гиперболических уравнений. Дисс. ... доктора физ.-мат. наук. – Самара, 2002. – 195 с.
13. Сабитов К.Б. Краевая задача для уравнения параболо-гиперболического типа с нелокальным интегральным условием // Дифференциальные уравнения. 2010. Т.46. № 10. – С. 1468-1478.
14. Салахитдинов М.С., Уринов А.К. Об одной нелокальной краевой задаче для смешанного параболо-гиперболического уравнения // Изв. АН УзССР. Серия физ.-мат. наук. 1984. № 3. – С. 29-34.
15. Стручина Г.М. Задача о сопряжении двух уравнений // Инженерно -физический журнал. 1961. Т.4. №11. – С. 99-104
16. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – Москва: Наука, 1966. – 724 с.
17. Уринов А.К., Маманазаров А.О. Задачи с интегральным условием для параболо-гиперболического уравнения с нехарактеристической линией изменения типа // Вестник НУУз. 2017. № 2/2. –С. 227-238.
18. Уринов А.К., Халилов К.С. Задача с интегральным условием для параболо-гиперболического уравнения // Научные ведомости БелГУ. Серия: Матем. Физика. – Белгород. 2015. №17(214). вып.40. – С. 143-146.
19. Уринов А.К., Халилов К.С. Задачи с нелокальными условиями для параболо-гиперболического уравнения // Доклады Академии наук Республики Узбекистан. –Ташкент. 2014. №2. – С. 6-9.
20. Уринов А.К., Халилов К.С. Задачи с нелокальными условиями для параболо-гиперболического уравнения // Доклады Академии наук Республики Узбекистан. –Ташкент. 2014. №5. – С. 8-10.
21. Уринов А.К., Халилов К.С. Нелокальная задача для одного параболо-гиперболического уравнения третьего порядка с сингулярным коэффициентом // Тезисы докладов Республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых «Дифференциальные уравнения и родственные проблемы анализа», 04-05 ноября 2021 г. Бухара. – С. 271-272.
22. А.Қ.Ўринов. Параболо-гиперболик типдаги дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалалар. - Ташкент: Наврўз, 2016, 216 бет.
23. Mamanazarov A.O. A nonlocal problem for a parabolic hyperbolic equation with singular coefficients // Uzbek Math. Journal. 2021, Volume 65, Issue 1, - pp.118-136.
24. Urinov A.K., Khalilov K.S. A Nonlocal Problem for a Third Order Parabolic-Hyperbolic Equation with a Singular Coefficient // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. 2022. Vol.15. Issue 4. – pp. 467-481. DOI: 10.17516/1997-1397-2022-15-4-467-481.

25. Urinov A.K., Mamanazarov A.O. A problem with integral condition for a parabolic-hyperbolic equation with non-characteristic line of type changing // Contemporary Analysis and Applied Mathematics, Vol.3, No.2, 170-183, Turkey, Istanbul, 2015.
26. Khalilov K.S., Ne'matjonova M.R. Ikkinchi tartibli parabolo-giperbolik tipdagi tenglama uchun integral shartli masala // American journal of education and learning. 2024. Volume-2. Issue-4. – pp. 12-18.