International Congress on
Biological, Physical And Chemical Studies

International Congress on Biological, Physical And Chemical Studies - is an international conference platform under open open-access policy. The conference is led by international expert members who take an objective approach to peer review, ensuring each research paper is reviewed, edited by authors and evaluated on its own scholarly merits and research integration. Publishing and joining on the procedding of the International Congress on Biological, Physical And Chemical Studies will exsure publishing experience and indexing possibilities on various global indexing.

Triedrlar Bilan Tekislikdagi Uchburchakning Ba'zi Xossalari Bilan O'xshashliklari

S. A. Bekmetova, T. G'. Olimbaayev
UrDU fizika-matematika, fakulteti katta o'qituvchisi

Annotatsiya

Mazkur maqolada ko'p uchramaydigan uch yoqli burchaklarga oid ba'zi ma`lumotlar. Bular orqali o'quvchi fazoviy jisimlarni tassavur qilish ular haqida konikma hosil qilsh uchun bu maqola juda zarur.

Kalit so'zlar: Burchak, tengsizlik, isbot, kosinuslar teoremas, bissektrisa, burchak.sinuslar teoremas,og`rlik markazi,yassi burchak,ikki yoqli burchak.

Akademik litseylar va kasb hunar kollejlarida stereometriya kursini o'qitishda fazoviy jismlarning xossalarini ularga planimetriya kursidan ma'lum bo'lgan tekislikdagi figuralarning xossalariga bog'lab o'rgatish o'rganilayotgan fazoviy jismlar haqidagi tassavurlarni kengaytirishga, tekislikdagi va fazodagi jismlarning o'zaro o'xshash tomonlarini ko'ra olishga imkon beradi.

Jumladan, uchburchak va tetraedrning bir qancha o'xshash xossalari, ko'plab geometrik tushunchalarda esa uchburchak bilan bog'lanishlarini ko'ramiz, fazoviy o'xshashlikka ega bo'lamiz. Masalan: uchburchak tomoni va tetraedr yoqi, ichki chizilgan aylana – ichki chizilgan sfera, tashqi chizilgan aylana – tashqi chizilgan sfera, yuza – hajm, burchak bissektrisasi – ikki yoqli burchak bissektrisa tekisligi va hokazo.

Bu o'xshashliklar faqat tashqi tomondan emas. Agar formulalardagi planimetrik terminlarni ularga mos stereometrik terminlar bilan almashtirsak ko'pchilik uchburchak haqidagi teoremalar tetraedr haqidagi teoremalarga aylanadi. Quyida shunday bir qancha teoremalarni va o'xshashlik munosabatlarini ko'rib o'tamiz.

Dastlab triedr haqida ma'lumot beramiz:

Triedr deb, bir nuqtadan chiquvchi, bir tekislikda yotmaydigan uchta nurdan iborat geometric shaklga aytiladi.

Endi triedr va uchburchak orasidagi ba'zi o'xshashliklarni ko'rib chiqamiz. Triedrning α , β , γ yassi burchaklarini ABC uchburchakning a , b , c tamonlariga, A , B , C ikki yoqli burchaklarini esa uchburchakning $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ burchaklariga mos qo'ysak triedrlar va uchburchaklar o’rtasida ajoyib o’xshashliklar kelib chiqadi.

Triedrning ixtiyoriy ikkita yassi burchagi yig’indisi uchinchi yassi burchakdan katta bo’ladi:

$$\beta+\gamma>\alpha$$

Uchburchaklarda esa uning ixtiyoriy ikkita tamoni yig’indisi uchinchi tamondan katta bo’lardi:

$$b+c>a$$

Triedrlar uchun kosinuslarning ikkinchi teoremasi quyidagicha ifodalanadi:

$$\cos A=-\cos B\cos C+\sin B\sin C\cos\alpha$$

$$\cos B=-\cos A\cos C+\sin A\sin C\cos\beta$$

$$\cos C=-\cos A\cos B+\sin A\sin B\cos\gamma$$

Yuqoridagi tengliklardan foydalanib quyidagi tenglikni hosil qilamiz:

$$tg\frac{A+B+C-\pi}{4}=\sqrt{tg\frac{p}{2}\cdot tg\frac{p-\alpha}{2}\cdot tg\frac{p-\beta}{2}\cdot tg\frac{p-\gamma}{2}}\quad (*)$$

Bu yerda $p=\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$.

Uchburchaklar uchun Geron formulasi quyidagicha bo’ladi:

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\quad (**)$$

Bu yerda $p=\dfrac{a+b+c}{2}$.

(*) va (**) tengliklarga nazar tashlasak bu tengliklar orasidagi o’xshashlikni ko’rishimiz mumkin.

Triedrlar uchun sinuslar teoemasi uchburchaklar uchun sinuslar teoemasiga analogdir:

Triedr uchun sinuslar teoremasi. Triedrning ikki yoqli burchaklarining sinusi ularning qarshisida yotgan mos yassi burchaklari sinusi bilan proporsional:

$$\frac{\sin A}{\sin\alpha}=\frac{\sin B}{\sin\beta}=\frac{\sin C}{\sin\gamma}.$$

Uchburchaklar uchun sinuslar teoremasi. Ixtiyoriy uchburchakning burchaklarining sinusi ularning qarshisida yotgan mos tamonlari bilan prorsional:

$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}.$$

Triedrning mediana tekisligi va uchburchakning medianasi orasidagi o’xshashlik:

Triedrni hosil qiluvchi qirrasi va uning qarshida joylashgan yassi burchak bissektrisasi orqali o’tgan tekislik ushbu triedrning *mediana tekisligi* deyiladi.

Uchburchakning uchidan chiqib uning qarshisida joylashgan tamonning o’rtasini tutashtiruvchi kesma ushbu uchburchakning *medianasi* deyiladi.

Triedrning uchta mediana tekisligi umumiy to’g’ri chiziqga ega. (Bu to’g’ri chiziq *triedrning medianasi* deyiladi).

Uchburchakning uchta medianasi bitta nuqtada kesishadi. (Bu nuqta *uchburchak og'irlik markazi* deyiladi).

Triedrning bissektrisa tekisligi va uchburchakning bissektrisa orasidagi o'xshashlik:

Triedrning qirrasidan chiqib, bu qirraga tegishli ikki yoqli burchakni ikkita teng bo'lgan ikki yoqli burchakka bo'luvchi yarim tekislik mazkur burchakning *bissektrisa yarimtekisligi* deyiladi. Bu yarim tekislikni o'z ichiga olgan tekislik ikki yoqli burchakning *bissektrisa tekisligi* deyiladi.

Uchburchak uchidan chiquvchi va bu uchdagi burchakni ikkita teng bo'lgan burchakka bo'lib, qarama-qarshi tamonga tutashuvchi kesma uning bissektrisasi deyiladi.

Triedrning ikki yoqli burchaglari bissektrisa tekisliklari uning yoqlariga teng og'ishgan umumiy to'g'ri chiziqga ega.

Uchburchak burchaklari bissektrisalari bitta nuqtada kesishadi.

Triedrning balandlik tekisliklari orasidagi o'xshashlik:

Triedrning har bir qirrasidan o'tuvchi va mos ravishda qarama-qarshi yoqlariga perpendikulyar bo'lgan uchta tekislik berilgan triedrning *balandlik tekisliklari* deyiladi.

Uchburchak uchlaridan chiquvchi va mos ravishda qarama-qarshi tamonlarga perpendikyular bo'lib tutashuvchi uchta kesma bu uchburchakning balandliklari deyiladi.

Triedrning uchta balandlik tekisliklari umumiy to'g'ri chiziqga ega. Bu to'g'ri chiziq triedrning orto o'qi deyiladi.

Uchburchakning balandliklari bitta nuqtada kesishadi.

Agar triedrning orto o'qi uning ichida yotsa, triedrning balandlik tekisliklari mos yoqlarini a_1, b_1, c_1 nurlar bo'yicha kesib yasalgan triedr uchun bu balandlik tekisliklar uning ikki yoqli burchaklari bissektrisa tekisliklaridan iborat bo'ladi.

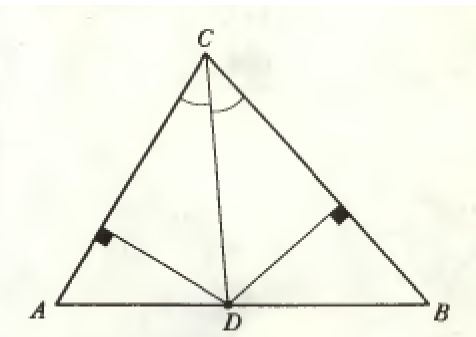
Agar uchburchakning balandliklari uning ichida kesishsa, bu balandliklarning uchburchak tamonlari bilan tutashgan nuqtalari orqali yasalgan uchburchak uchun bu balandliklar uning bissektrisasi bo'ladi.

Endi tetraedr va uchburchak orasidagi ba'zi o'xshashliklarni ko'rib chiqamiz.

1 – teorema. ABC uchburchakning C burchagining CD bissektrisasi uning qarshisida yotgan tomonni AC va BC tomonlariga proporsional kesmalarga ajratadi.

Isboti: Faraz qilaylik, ADC va DBC uchburchaklarning asoslari mos ravishda AC va BC kesmalar bo'lsin (1-rasm). D nuqta ACB burchakning tomonlaridan teng uzoqlashgan bo'ladi. Shuning uchun

$$\frac{S_{ADC}}{S_{BDC}} = \frac{|AC|}{|BC|}.$$



1-rasm.

Endi bu uchburchaklarning asoslarini AD va DB kesmalar deb faraz qilsak, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\frac{S_{ADC}}{S_{BDC}} = \frac{|AD|}{|BD|}.$$

Bundan $\frac{|AD|}{|BD|} = \frac{|AC|}{|BC|}$.

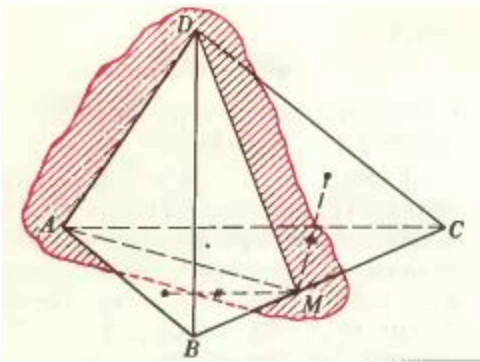
2 – teorema. Tetraedrning ixtiyoriy qirrasi ikki yoqli burchagi bissektrisa tekisligi unga qarama-qarshi qirrani va bu qirra yotgan yoqlardan ixtiyoriy bittasini shunday bo'laklarga ajratadiki, bunda bo'lingan qirralari nisbati ular yotgan, bo'lingan yoqlar yuzalari nisbatiga teng bo'ladi.

Isboti. ABCD tetraedrning AD qirradagi ikki yoqli burchak bissektrisial tekisligi bilan kesimi ADM bo'lsin (2-rasm). ACMD va ABMD tetraedr hajmlarini mos ravishda V_1 va V_2 bilan belgilaymiz. ADC va ADB yoqlardan teng uzoqlashgan nuqtani M deb olsak, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{S_{ADC}}{S_{ADB}}.$$

Boshqa tomondan $\frac{V_1}{V_2} = \frac{S_{DMC}}{S_{DMB}} = \frac{|MC|}{|MB|}$.

Shuning uchun $\frac{S_{DMC}}{S_{DMB}} = \frac{|MC|}{|MB|}$.



2-rasm.

Endi uchburchak medianalari kesishgan nuqta haqidagi teorema va tetraedr uchun unga anologik teoremani keltiramiz.

3 – teorema. Uchburchakning medianalari bitta nuqtada kesishadi va kesishish nuqtasida uchburchak uchidan boshlab hisoblaganda 2:1 nisbatda bo'linadi.

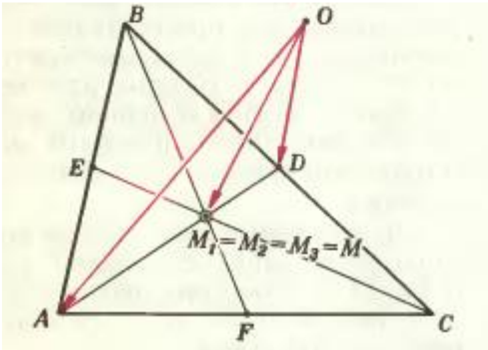
Isboti: M_1 nuqta ABC uchburchakning AD medianasidan olingan nuqta va $|AM_1|:|M_1D| = 2:1$ bo'lsin, O nuqta esa fazodagi ixtiyoriy nuqta bo'lsin (3-rasm)

U holda $\overrightarrow{OM_1} = \frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{OD}$ va $\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$ bo'ladi. Bundan

$\overrightarrow{OM_1} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$ tenglikka ega bolamiz.

Agar M_2 va M_3 nuqtalar mos ravishda CE va BF medianalardan olingan nuqtalar bo'lsa va mediana uzunligini uchburchak uchidan hisoblaganda 2:1 nisbatda bo'lsa, yuqoridagiga o'xshash

$\overrightarrow{OM_2} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}), \quad \overrightarrow{OM_3} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$.



3-rasm.

Bundan, $\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{OM_3}$ va M_1, M_2, M_3 nuqtalar ustma-ust tushishi kelib chiqadi. Teorema isbotlandi.

Eslatma: Tetraedr medianasi deb, tetraedr uchidan chiqib qarshisidagi yoqning og'irlik markazi bilan tutashtiruvchi kesmaga aytiladi.

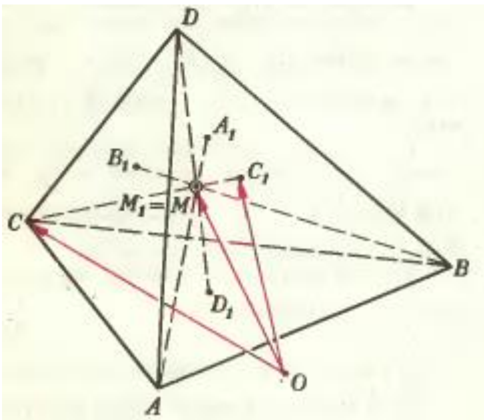
4 – teorema. Tetraedrning to'rtta medianasi bitta nuqtada kesishadi va burchak uchidan boshlab hisoblaganda 3:1 nisbatda bo'linadi.

Isboti. M_1 nuqta ABCD tetraedrning CC_1 medianasida olingan nuqta va

$|CM_1|:|M_1C| = 3:1$ shart bajariladigan nuqta bo'lsin (4-rasm). Fazoda ixtiyoriy O nuqta olamiz . u holda

$\overrightarrow{OM_1} = \frac{1}{4} \cdot \overrightarrow{OC} + \frac{3}{4} \cdot \overrightarrow{OC_1}$ bo'ladi va bundan tashqari

$\overrightarrow{OC_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD})$ tenglikka ega bo'lamiz, bu yerda C_1 – ABD uchburchakning o'girlik markazi. Shuning uchun, $\overrightarrow{OM_1} = \frac{1}{4} \cdot \overrightarrow{OC} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}) = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$.



4-rasm.

Huddi shuningdek, M_2, M_3, M_4 nuqtalar mos ravishda tetraedrning AA_1, BB_1, va DD_1 medianalarida olingan nuqtalar va bu nuqtalarda medianalar uzunliklari 3:1 nisbatda bo'linsin. Yuqoridagidek mulohaza yuritib,

$\overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{OM_3} = \overrightarrow{OM_4} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$ tenglikka ega bo'lamiz va bundan ko'rinadiki, M_1, M_2, M_3, M_4 nuqtalar ustma – ust tushadi.

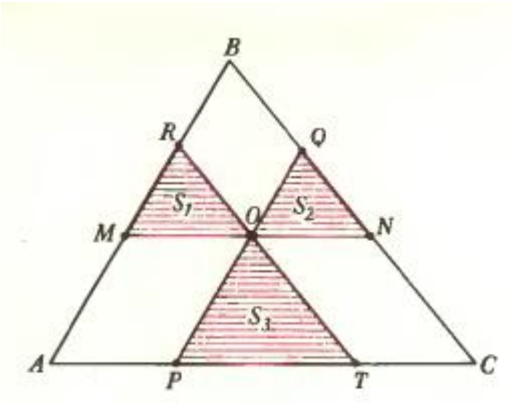
5 – teorema. ABC uchburchak ichidan ixtiyoriy O nuqta olamiz va bu nuqtadan uchburchak tomonlariga parallel to'g'ri chiziqlar o'tkazamiz. Agarda hosil bo'lgan kichik uchburchaklar yuzlarini – S_1, S_2, S_3 va ABC uchburchak yuzini esa S bilan belgilasak (5-rasm), quyidagi tenglik o'rinli

$$\sqrt{S} = \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3} \ .$$

5-rasm.

Isboti. Hosil bo'lgan uchburchaklar ABC uchburchakka o'xshash. Shuning uchun, $\frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}} = \frac{|MR|}{|AB|}, \frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S}} = \frac{|OQ|}{|AB|}, \frac{\sqrt{S_3}}{\sqrt{S}} = \frac{|OP|}{|AB|}.$

Bu tengliklarni qo'shib quyidagiga ega bo'lamiz:



$$\frac{\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}}{\sqrt{S}} = \frac{|MR| + |OQ| + |OP|}{|AB|} = \frac{|MR| + |BR| + |MA|}{|AB|} = 1$$

$$\sqrt{S} = \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3} \ .$$

Endi tetraedr uchun yuqoridagi teoremaning anologini keltiramiz.

6 – teorema. Tetraedr ichidagi ixtiyoriy nuqtadan tetraedr yoqlariga parallel to'rtta tekislik o'tkazamiz. Agarda hosil bo'lgan kichik tetraedrlar hajmlari – V_1,V_2,V_3,V_4 va berilgan tetraedr hajmi esa V bo'lsa, quyidagi tenglik o'rinli

$$\sqrt[3]{V} = \sqrt[3]{V_1} + \sqrt[3]{V_2} + \sqrt[3]{V_3} + \sqrt[3]{V_4}.$$

Bundan tashqari, yana quyidagi anologiyalarni misol keltirishimiz mumkin.

a – qismi planimetriyadagi teorema, b – qismi fazodagi anologi.

1 – masala. a) Uchburchakning yuzi S va unga ichki chizilgan aylana uchun quyidagi formula o'rinli $S = \frac{1}{2}pr$, bu yerda p – uchburchak perimetri, r – ichki chizilgan aylana radiusi.

b) Tetraedr hajmi V va unga ichki chizilgan sfera uchun quyidagi formula o'rinli $V = \frac{1}{3}Sr$, bu yerda S – tetraedrning to'la sirti, r – bu sferaning radiusi.

2 – masala. a) Uchburchakka ichki chizilgan aylana radiusi r bo'lsa,

$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}$ tenglik o'rinli, bu yerda h_1,h_2,h_3 – uchburchak balandliklari.

Tetraedrga ichki chizilgan sfera radiusi r bo’lsa, $\frac{1}{r}=\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}+\frac{1}{h_4}$ tenglik o’rinli, bu yerda h_1, h_2, h_3, h_4 – tetraedrning balandliklari.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. П о н а р и н Я. П. Элементарная геометрия. Т. 2. — М.: МЦНМО, 2004.
2. Адамар Ж. Элементарная геометрия. Част 2. Стереометрия. — М.: Учпедгиз, 1958.
3. Атанасян Л. С. и д р. Геометрия 10–11. — М.: Просвещение, 1992.
4. Готман Э. Г., Скопец З. А. Решение геометрических задач аналитическим методом. — М.: Просвещение, 1979.
5. П е р е п ё л к и н Д. И. Курс элементарной геометрии. Ч. 2. — М.–Л.: ГИТТЛ, 1949.
6. Смирнова И.М.В Мире многогранников. М.: Просвещение, 1995.
7. I. Isroilov, Z. Pashayev. Geometriya. T., “O’qituvchi”. 2010-y
8. М. В. Лурьев, Б. И. Александров. Пособие “по геометрии. М., МГУ, 1984
9. A. V. Pogorelov. Geometriya. O’rta maktabning 7-11-sinflari uchun darslik. T., “O’qituvchi”. 1995