https://gospodarkainnowacje.pl GOSPODARKA I INNOWACJE

LABORATORIUM WIEDZY Artur Borcuch

Volume: 70 | 2026
Economy and Innovation
ISSN: 2545-0573

For more information contact: editor@gospodarkainnowacje.pl

CHIZIQLI ALMASHTIRISHLARNI O'QITISHDA ZAMONAVIY PEDAGOGIK YONDASHUVLAR: INTERFAOL MTODLAR ORQALI MATEMATIK SAVODXONLIKNI OSHIRISH

Sadullayeva Iroda Po'lat qizi
Navoiy davlat universiteti doktoranti

A R T I C L E I N F O.

Keywords: Chiziqli almashtirishlar, matematik savodxonlik, ketma-ket ko'p o'lchovli ifodalash, oliy algebra ta'limi, pedagogik integratsiya, geometrik vizualizatsiya

Annotatsiya

Oliy ta'lim muassasalarida abstrakt algebrani, xususan, chiziqli almashtirishlar nazariyasini an'anaviy ma'ruza shaklida o'qitish ko'pincha mavhum matematik formulalar va ularning konseptual mohiyati o'rtasida uzilishlarga olib kelmoqda. Ushbu maqola mutlaqo yangi pedagogik model — "Ketma-ket ko'p o'lchovli ifodalash" (Sequential Multiple Representations - SMR) texnologiyasini joriy etish orqali talabalarning matematik savodxonligini oshirishga qaratilgan. Mazkur SMR modeli o'qitish paradigmasini passiv tinglashdan butun auditoriya ishtirokidagi boshqariluvchi kashfiyot yondashuviga o'zgartiradi. Ushbu tizim doirasida talabalar bitta mavhum algebraik obyektni to'rtta kognitiv bosqich: analitik ifodalash, matritsaviy abstraksiya, geometrik vizualizatsiya va strukturaviy tahlil orqali o'rganadilar. Tajriba-sinov natijalari shuni ko'rsatadiki, mazkur integrativ metodni amaliyotga tatbiq etish talabalarning fazoviy tasavvuri, nazariy bilimlarni amaliyotga bog'lashi hamda turli algebraik tushunchalarni bir butun sifatida ko'ra olish qobiliyatini sezilarli darajada yaxshilagan. Xulosa o'rnida ta'kidlash mumkinki, oliy algebra ta'limida SMR pedagogik modelini qo'llash nafaqat mavzuni chuqur anglashga xizmat qiladi, balki talabalarning matematik savodxonligini xolis va ko'p o'lchovli mezonlar asosida baholash mexanizmini ham taqdim etadi.

Kirish

Oliy ta'lim tizimida raqobatbardosh, analitik va tanqidiy fikrlaydigan kadrlarni tayyorlashda fundamental fanlarning, xususan, matematikaning o'rni beqiyosdir. Zamonaviy ta'lim paradigmasida talabalarga shunchaki qoidalar, teoremalar va formulalarni mexanik tarzda yodlatish emas, balki ularda chuqur **matematik savodxonlikni** shakllantirish ustuvor vazifa hisoblanadi. Matematik savodxonlik o'z ichiga nafaqat hisoblash ko'nikmalarini, balki mavhum (abstrakt) tushunchalarni tahlil qilish, mantiqiy xulosa chiqarish, fazoviy tasavvur qilish va olingan bilimlarni nostandart nazariy hamda amaliy vaziyatlarda qo'llay olish qobiliyatini qamrab oladi.

Oliy matematika va algebra kursining eng fundamental, ayni paytda talabalar tomonidan o'zlashtirilishi eng murakkab bo'lgan kognitiv to'siqlarga boy bo'limlaridan biri — bu "Chiziqli almashtirishlar nazariyasi"dir. Chiziqli fazolar, operatorlar, matritsaviy o'tishlar, yadro (kernel) va obraz (image) kabi tushunchalar o'zining o'ta yuqori darajadagi mavhumligi bilan ajralib turadi. Kuzatishlar va ta'lim amaliyoti shuni ko'rsatadiki, an'anaviy o'qitish metodikasida (reproduktiv ma'ruzalar va faqat doskada standart misollar yechish) ushbu mavzularni tushuntirish talabaning fanining mohiyatini anglashiga to'sqinlik qiladi. Talabalar chiziqli almashtirishlarga oid teoremalarni mexanik tarzda o'zlashtiradilar, biroq quruq formulalar ortida yotgan real geometrik va strukturaviy ma'noni to'liq anglab yetmaydilar. Bu holat, o'z navbatida, talabalarning umumiy matematik savodxonligi va kasbiy kompetensiyalari rivojlanishiga jiddiy zarar yetkazadi.

Metodologiya

Jahon pedagogika fani va amaliyotida ta'lim sifatini oshirish, kognitiv qiyinchiliklarni yengishning eng samarali yo'llaridan biri sifatida **integrativ yondashuv** va interfaol metodlar e'tirof etiladi. Xorijiy tadqiqotchilar abstrakt algebrani o'qitishda hamkorlikda o'qitish (collaborative learning) va vizualizatsiya muhimligini ta'kidlasalar-da, oliy ta'lim muassasalarida bitta aniq algebraik obyektni turli rakurslardan ko'rsatib beruvchi yaxlit metodologik tizim yetishmaydi. Xususan, chiziqli almashtirishlar mavzusini aniq pedagogik texnologiyalar bilan integratsiya qilishning mexanizmlari yetarlicha tadqiq etilmagan bo'lib, o'qituvchilarga bu borada aniq uslubiy ko'rsatmalar zarur.

Shundan kelib chiqib, ushbu tadqiqotning **maqsadi** — chiziqli almashtirishlar nazariyasini o'qitishda zamonaviy pedagogik yondashuvlarni (xususan, "Ketma-ket ko'p o'lchovli ifodalash" - SMR modelini) qo'llash mexanizmlarini ishlab chiqish hamda interfaol metodlar orqali talabalarning matematik savodxonligini oshirish va ularni obyektiv baholash mezonlarini ilmiy asoslashdan iborat.

Natijalar va Munozara

Tadqiqot doirasida oliy ta'lim muassasalarida "Chiziqli almashtirishlar nazariyasi"ni o'qitishda an'anaviy, passiv ma'ruza usulidan voz kechilib, mualliflik yondashuvi asosidagi **"Ketma-ket ko'p o'lchovli ifodalash" (Sequential Multiple Representations - SMR)** pedagogik modeli ishlab chiqildi va o'quv jarayoniga joriy etildi. SMR modelining metodologik asosi kognitiv psixologiya va konstruktivizm nazariyalariga tayanadi. Ushbu metodning bosh maqsadi — bitta mavhum algebraik obyektni (chiziqli almashtirishni) butun auditoriya ishtirokida to'rtta turli kognitiv rakursda tahlil qilish (Guided Discovery) tizimini yaratishdir.

O'quv jarayoni kichik guruhlarda emas, balki o'qituvchi va butun sinfning interfaol muloqoti shaklida, uzluksiz kognitiv yuklamani oshirib borish prinsipi asosida quyidagi to'rt bosqichda amalga oshiriladi:

1-bosqich: Analitik ifodalash (Analytical Representation) Mazkur bosqich modelning kognitiv poydevori hisoblanib, uning maqsadi talabalarni murakkab fazoviy tasavvurlarga majburlashdan oldin, ularni o'zlariga tanish bo'lgan simvolik tahlil muhitiga kiritishdir. Bosqich quyidagi stsenariy asosida kechadi:

Obyektni formal kiritish: O'qituvchi tadqiqot obyektini qat'iy analitik shakldа doskaga yozadi. Masalan, R^2 fazodan R^2 fazoga o'tkazuvchi A operator ixtiyoriy $x=(x_1,x_2)$ vektor uchun quyidagi qonuniyat asosida ta'sir qiladi:

$$A(x)=(x_1+2x_2,3x_1-x_2)$$

Shundan so'ng, o'qituvchi muammoli vaziyatni yaratadi: *"Ushbu operator chiziqli almashtirish bo'lishi uchun qanday fundamental xossalarni qanoatlantirishi kerak va biz buni qanday isbotlaymiz?"*

Interfaol isbotlash (Talabalar faoliyati): Talabalar chiziqlilikning ikkita fundamental aksiomasini (additivlik va bir jinslilik) analitik hisob-kitoblar orqali mustaqil isbotlaydilar.

Dastlab, ixtiyoriy $y=(y_1,y_2)$ vektor uchun additivlik tekshiriladi:

$$A(x+y)=((x_1+y_1)+2(x_2+y_2),3(x_1+y_1)-(x_2+y_2))$$

Qavslarni ochib, guruhlash orqali talabalar quyidagi natijaga keladilar:

$$A(x+y)=(x_1+2x_2,3x_1-x_2)+(y_1+2y_2,3y_1-y_2)=A(x)+A(y)$$

So'ngra, ixtiyoriy $\lambda \in R$ skalyar son uchun bir jinslilik sharti ko'rsatib beriladi:

$$A(\lambda x) = (\lambda x_1 + 2\lambda x_2, 3\lambda x_1 - \lambda x_2) = \lambda(x_1 + 2x_2, 3x_1 - x_2) = \lambda A(x)$$

Bu qadam yakunida talabalar obyektning chiziqli ekanligini sof deduktiv mantiq orqali o'zlari ilmiy isbotlaydilar. Bu jarayon talabaning miyasida obyektning abstrakt-simvolik xaritasini shakllantiradi.

2-bosqich: Matritsaviy abstraksiya (Matrix Abstraction) Analitik tahlildan so'ng, dars darhol "Matritsaviy abstraksiya" bosqichiga o'tadi. Maqsad — yoyiq ko'rinishdagi funksional tenglamalarni ixcham, ko'p o'lchovli ma'lumotlar strukturasiga (matritsaga) o'tkazishdir.

O'tish (Transfomatsiya) vazifasi: O'qituvchi oldingi bosqichda isbotlangan $A(x) = (x_1 + 2x_2, 3x_1 - x_2)$ almashtirishni olib, uni standart bazislar: $e_1 = (1,0)$ va $e_2 = (0,1)$ dagi matritsasini tuzish vazifasini qo'yadi.

Talabalar faoliyati: Auditoriya tenglamalar tizimidagi koeffitsiyentlarni bazis vektorlar orqali hisoblaydi:

$$A(e_1) = (1 + 2\cdot 0, 3\cdot 1 - 0) = (1,3)$$
$$A(e_2) = (0 + 2\cdot 1, 3\cdot 0 - 1) = (2,-1)$$

Olingan vektorlarni ustun qilib yozish orqali almashtirishning A matritsasi quriladi:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Algebraik formula ixcham matritsaga aylangach, o'qituvchi ochiq savol tashlaydi: *"Agar fazo bazisini o'zgartirsak, bu matritsa o'zgaradimi?"* Bu savol talabalarda analitik ko'rinishlar va matritsaviy yozuvlar o'rtasida bog'liqlik o'rnatish, ma'lumotlarni ixchamlash va matritsaviy fikrlash kognitiv ko'nikmasini shakllantiradi. Eng muhimi, ular uchinchi bosqich bo'lmish — tayyor matritsaning geometrik ma'nosini kashf qilishga to'liq tayyor bo'ladilar.

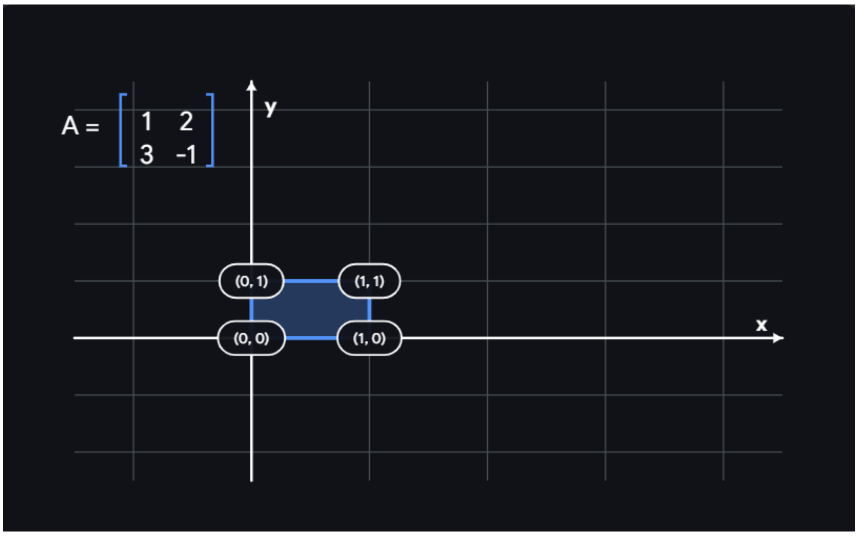
3-bosqich: Geometrik vizualizatsiya (Geometric Visualization) Matritsaviy abstraksiyadan so'ng, quruq raqamlar va koeffitsiyentlar ortida qanday real fazoviy jarayon yotganini kashf qilish maqsadida auditoriya "Geometrik vizualizatsiya" bosqichiga o'tadi. Mazkur integrativ bosqich talabalarning qator kognitiv to'siqlarini yengib o'tishiga va mantiqiy-fazoviy tasavvurini (spatial reasoning) rivojlantirishiga xizmat qiladi.

Jarayon quyidagi amaliy-vizual stsenariy asosida amalga oshiriladi: o'qituvchi oldingi bosqichda tuzilgan $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ matritsasini olib, uning R^2 tekisligidagi standart birlik kvadratga (uchlari $(0,0),(1,0),(0,1)$ va $(1,1)$ nuqtalarda bo'lgan shaklga) qanday ta'sir qilishini aniqlash vazifasini qo'yadi. Talabalar shunchaki tinglovchi bo'lib qolmasdan, matritsani kvadratning har bir bazis vektoriga ko'paytirib, almashtirishdan keyingi yangi koordinatalarni mustaqil hisoblaydilar:

gorizontal bazis vektorining siljishi $A\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, vertikal bazis vektorining $A\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ va diagonal uchi $A\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ga o'tishini analitik tasdiqlaydilar.

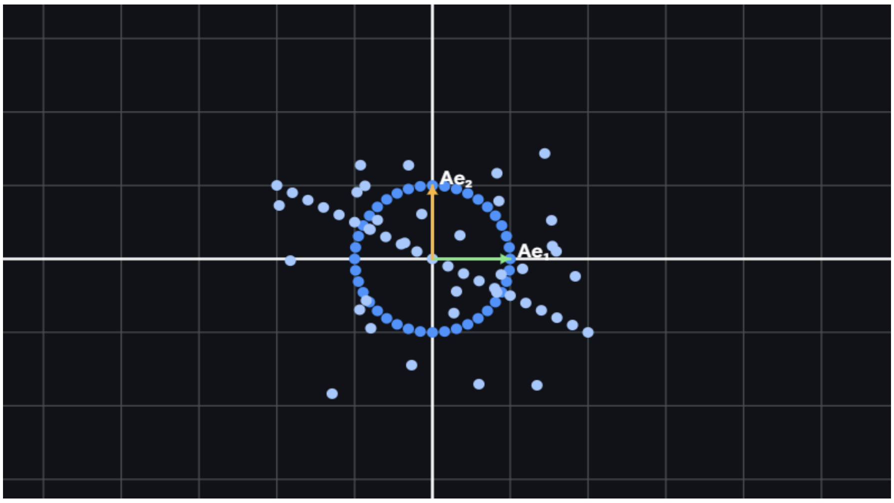
Olingan natijalar asosida darhol doskada yoki zamonaviy IT vositalari yordamida almashtirishning fazoviy harakati chizib ko'rsatiladi *(1-rasmga qarang).* Talabalar oddiy kvadrat matritsa ta'sirida cho'zilib, buralib, yangi koordinatalardagi parallelogrammga aylanganini o'z ko'zlari bilan ko'radilar. Aynan shu nuqtada kognitiv sintez yuz beradi: o'qituvchi auditoriya e'tiborini matritsa determinantiga qaratadi $(\square = -7)$. Determinantning manfiyligi va modul bo'yicha 7 ga teng ekanligi — berilgan chiziqli almashtirish natijasida tekislik yuzasi nafaqat 7 marta kattalashgani, balki o'zining fazoviy oriyentatsiyasini (yo'nalishini) teskarisiga o'zgartirgani haqidagi fundamental ilmiy xulosa auditoriya ishtirokida kashf qilinadi.

1-rasm. "Geometrik vizualizatsiya" bosqichida $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}$ chiziqli almashtirishining R^2 fazodagi ta'siri (birlik kvadratning parallelogrammga aylanish jarayoni).



4-bosqich: Strukturaviy tahlil va sintez (Structural Analysis) Geometrik vizualizatsiyadan so'ng, olingan barcha analitik va fazoviy xulosalarni chiziqli algebraning eng fundamental tushunchalari — Yadro $(KerA)$ va Obraz $(\operatorname{Im} A)$ xossalari bilan bog'lash maqsadida auditoriya yakuniy kognitiv bosqichga o'tadi. Bu bosqich talabalarni nafaqat hisoblashga, balki olingan natijalarning mantiqiy-matematik mohiyatini anglashga undaydi. Jarayon quyidagi analitik stsenariy asosida davom etadi: o'qituvchi auditoriyaga tekislikda shunday vektorlar mavjud yoki yo'qligi, ya'ni bu almashtirish ularni nol $(0,0)$ nuqtaga o'tkazishi mumkinligi haqida muammoli savol bilan yuzlanadi. Talabalar darhol ushbu shartni qanoatlantiruvchi $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ 3x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$ bir jinsli tenglamalar tizimini tuzadilar. Ular oldingi bosqichda hisoblangan determinant $(\Delta = -7 \neq 0)$ ga tayanib, bu tizim faqatgina trivial (nol) yechimga ega ekanligini analitik tasdiqlaydilar. Natijada, $KerA = \{(0,0)\}$ ekanligi ilmiy asoslanib, buning geometrik ma'nosi — almashtirish jarayonida tekislikdagi hech bir nuqta (koordinata boshidan tashqari) yo'qolib ketmasligi kashf qilinadi. Yadro faqat nol vektordan iborat ekanligi aniqlangach, talabalar o'lchamlar haqidagi fundamental teoremaga $\dim(KerA) + \dim(\operatorname{Im} A) = n$ murojaat qilib, obrazning o'lchami 2 ga teng ekanligini, ya'ni butun tekislik o'ziga to'la yoyilishini $(\operatorname{Im} A = R^2)$ isbotlaydilar. Ushbu to'rtinchi bosqich yakuniga kelib, kognitiv sintez yuz beradi: talabalar ongida bitta chiziqli almashtirish obyekt sifatidan ham funksional qoida (1-bosqich), ham ixcham matritsa (2-bosqich), ham fazoviy harakat (3-bosqich), ham fundamental algebraik struktura (4-bosqich) sifatida bir butun holatda birlashadi. Bu esa an'anaviy mexanik yodlashdan voz kechilib, haqiqiy matematik savodxonlikning shakllanganligini amalda namoyon etadi.

2-rasm. Chiziqli almashtirishning obrazi ($(\operatorname{Im} A)$).



Oliy ta'lim muassasalarida algebraik fanlarni, xususan, "Chiziqli almashtirishlar nazariyasi"ni o'qitishda an'anaviy yondashuvlardan integrativ pedagogik texnologiyalarga o'tish bevosita zamon talabidir. Ushbu maqolada taklif etilgan va amaliyotga joriy qilingan "Ketma-ket ko'p o'lchovli ifodalash" (SMR) modeli talabalarning abstrakt tushunchalarni o'zlashtirishdagi kognitiv to'siqlarini yengishda o'zining yuqori samaradorligini ko'rsatadi.

Xulosa

Tadqiqot va tahlil natijalari shuni tasdiqlaydiki, mavhum matematik obyektlarni passiv tinglash orqali emas, balki analitik, matritsaviy, geometrik va strukturaviy bosqichlar orqali birma-bir ochib berish (Guided Discovery) talabalarda shunchaki mexanik yodlash ko'nikmasini emas, balki chuqur **matematik savodxonlikni** shakllantiradi. Talabalar quruq formulalar va tenglamalar tizimi ortida yashiringan real fazoviy jarayonlarni vizualizatsiya qilish orqali nazariy bilimlarni amaliy isbotlashga va ularni mantiqiy bog'lashga o'rganadilar. Shuningdek, jarayon davomida ishlab chiqilgan uch bosqichli baholash mezoni (reproduktiv, kognitiv-o'tish va integrativ-savodxonlik darajalari) talabalarning bilimini obyektiv va adolatli baholash imkonini beradi.

Kelgusida mazkur integrativ pedagogik yondashuv asosida oliy ta'lim talabalari uchun maxsus uslubiy qo'llanmalar ishlab chiqish, shuningdek, SMR modelini oliy algebraning boshqa murakkab bo'limlarida (masalan, Jordan normal formasi, chiziqli fazolar va nilpotent operatorlar mavzularida) ham keng joriy etish maqsadga muvofiqdir. Bunday metodologik yechimlar, o'z navbatida, ta'lim jarayonini xalqaro standartlarga moslashtirishga va bo'lajak mutaxassislarning analitik tafakkurini rivojlantirishga bevosita xizmat qiladi.